

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
ПО МАТЕМАТИКЕ 2015–2016 уч. г.  
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП  
8 класс

**Решения и критерии оценивания**

**1.** Робинзон Крузо каждый второй день пополняет запасы питьевой воды из источника, каждый третий день собирает фрукты и каждый пятый день ходит на охоту. Сегодня, 13 сентября, у Робинзона тяжёлый день: он должен делать все эти три дела. Когда у Робинзона будет следующий тяжёлый день?

**Ответ.** 13 октября.

**Решение.**

Будем считать, сколько дней прошло начиная с «тяжёлого». Если это число делится на 2, то Робинзон должен пополнить запас воды. Если делится на 3, то пополнить запас фруктов. А если делится на 5, то сходить на охоту. А если он делает все три дела одновременно, то, значит, количество прошедших дней делится и на 2, и на 3, и на 5. Впервые это произойдёт через НОК  $(2; 3; 5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$  дней. Так как в сентябре 30 дней, то следующий тяжёлый день будет 13 октября.

**Критерии проверки.**

- Верно сказано, что количество прошедших дней должно делиться на 2, 3, 5, и сделан верный вывод, что в следующий раз это произойдёт через 30 дней, ответ верен — 7 баллов.
- Получено, что такое произойдёт через 30 дней, но в ответе ошибка, так как ученик посчитал, что в сентябре 31 день (это явно написано в работе), — 6 баллов.
- Получено, что такое произойдёт через 30 дней, но далее ошибка  $\pm 1$  в нахождении даты (не по причине предыдущего пункта) — 4 балла.
- Сразу (без обоснования) сказано, что такое произойдёт через 30 дней, и далее дата указана правильно — 3 балла.
- Только ответ «13 октября» без обоснований — 2 балла.
- Неверный пример — 0 баллов.

**2.** Самолёт вылетел из Перми 28 сентября в полдень и прибыл в Киров в 11 часов утра (везде в задаче время отправления и прибытия указывается местное). В 19 часов того же дня самолёт вылетел из Кирова в Якутск и прибыл туда в 7 часов утра. Через три часа он вылетел из Якутска в Пермь и вернулся туда в 11 часов утра 29 сентября. Сколько времени самолёт находился в воздухе?

**Ответ.** 12 часов.

**Решение.**

Самолёт отсутствовал в Перми 23 часа. Из них 8 часов он стоял в Кирове (с 11 до 19 часов) и три часа в Якутске. Итого из этих 23 часов он стоял  $8 + 3 = 11$  (часов), т. е. в воздухе самолёт находился  $23 - 11 = 12$  (часов).

**Критерии проверки.**

- Верное решение — 7 баллов.
- Верный ответ без обоснования — 2 балла.

**3.** На поляне собрались 25 гномов. Известно, что 1) каждый гном, который надел колпак, надел и обувь; 2) без колпака пришли 12 гномов; 3) босиком пришло 5 гномов. Каких гномов и на сколько больше: тех, кто пришёл в обуви, но без колпака, или тех, кто надел колпак?

**Ответ.** Тех, кто надел колпак, на 6 больше.

**Решение.**

Из условия 2 следует, что в колпаке пришли  $25 - 12 = 13$  гномов.

Из условия 1 получаем, что ровно 13 гномов пришли и в колпаке, и в обуви.

Из условия 3 следует, что всего в обуви пришло  $25 - 5 = 20$  гномов.

Значит,  $20 - 13 = 7$  гномов пришли в обуви, но без колпака.

Итак, тех, кто надел колпак (13 гномов), больше, чем тех, кто пришёл в обуви, но без колпака (7 гномов), ровно на 6 гномов.

**Критерии проверки.**

- Верное решение — 7 баллов.
- Верный ответ с неполным обоснованием — 3–4 балла.
- Только верный ответ без обоснования — 2 балла.

**4.** Разность квадратов двух чисел равна 6, а если уменьшить каждое из этих чисел на 2, то разность их квадратов станет равна 18. Чему равна сумма этих чисел?

**Ответ.**  $-2$ .

**Решение.**

Дано:

$$a^2 - b^2 = 6,$$

$$(a - 2)^2 - (b - 2)^2 = 18.$$

Дальше можно действовать по-разному.

**Способ 1.**

$(a - 2)^2 - (b - 2)^2 = a^2 - 4a + 4 - b^2 + 4b - 4 = a^2 - b^2 - 4(a - b)$ . Так как из первого условия  $a^2 - b^2 = 6$ , получаем, что  $6 - 4(a - b) = 18$ . Отсюда  $a - b = -3$ , и из первого уравнения получаем, что  $a + b = -2$ .

**Способ 2.**

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 6,$$

$$(a - 2)^2 - (b - 2)^2 = (a - b)(a + b - 4) = 18.$$

Очевидно, все множители в приведённых равенствах не равны нулю. Разделим второе уравнение на первое и обозначим искомую сумму  $a + b = x$ . Тогда

$$\frac{x - 4}{x} = 3, \text{ откуда } x = -2.$$

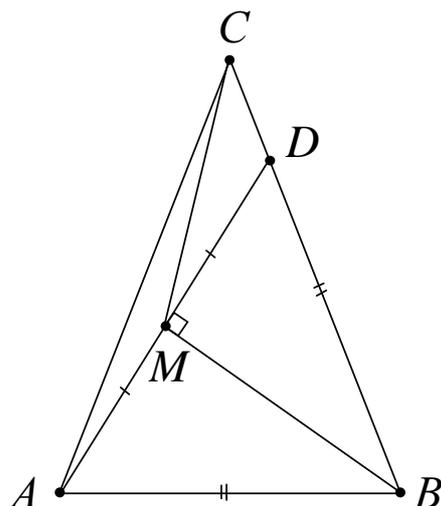
**Критерии проверки.**

- Верное решение — 7 баллов.
- Получено уравнение  $\frac{a+b-4}{a+b} = 3$ , а в дальнейшем решении арифметическая ошибка — 4 балла.
- Верно найдена разность  $a - b$ , дальнейших продвижений нет — 3 балла.
- При нахождении значения  $a + b$  или  $a - b$  допущена ошибка в знаке — не более 3 баллов.
- Только верный ответ без обоснования — 2 балла.

5. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AB$  на стороне  $CB$  выбрана точка  $D$  так, что  $CD = AC - AB$ . Точка  $M$  — середина  $AD$ . Докажите, что угол  $BMC$  — тупой.

**Решение.**

Так как  $CD = AC - AB = BC - AB$ , получаем, что  $DB = AB$ , а значит, треугольник  $ABD$  равнобедренный. Тогда его медиана  $BM$  является и высотой, т. е. угол  $BMD$  прямой. Значит,  $\angle BMC = \angle BMD + \angle DMC = 90^\circ + \angle DMC > 90^\circ$  тупой.



**Критерии проверки.**

- Верное решение — 7 баллов.
- Доказано, что треугольник  $ABD$  равнобедренный, но больше продвижений нет — 2 балла.

6. Квадрат с вершинами в узлах сетки и сторонами длиной 2015, идущими по линиям сетки, разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Верно ли, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4?

**Решение.**

Если периметр прямоугольника не делится на 4, то сумма его сторон не делится на 2. Сумма двух целых чисел не делится на 2, если они разной чётности, т. е. периметр прямоугольника не делится на 4, если одна его сторона чётная, а другая нечётная. Но тогда его площадь должна быть чётной. Однако площадь каждого из составляющих квадрат  $2015 \times 2015$  прямоугольников чётной быть не может, так как иначе их суммарная площадь была бы тоже чётной, но площадь квадрата  $2015 \times 2015$  нечётна.

**Критерии проверки.**

- Верное решение — 7 баллов.
- Есть идея, что если периметр не делится на 4, то сумма сторон должна быть нечётной, но дальнейших продвижений нет — 2 балла.
- Только ответ «да, верно» — 0 баллов.