

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ 2015–2016 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП
7 класс

Решения и критерии оценивания

1. Напишите вместо семи звёздочек семь различных цифр так, чтобы получилось верное равенство: $**** + ** + * = 2015$.

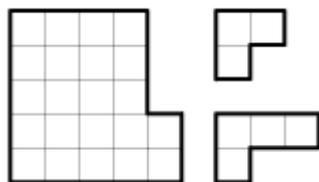
Решение. Например, $1987 + 25 + 3$. Возможны и другие варианты.

Критерии.

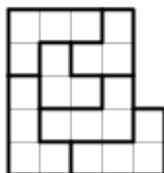
Правильный пример, в котором все цифры различны, — 7 баллов.

Верное равенство, но какая-то одна цифра повторяется 2 раза (использовано шесть цифр вместо семи) — 1 балл.

2. Требуется разрезать фигуру на трёхклеточные и четырёхклеточные уголки, нарисованные справа от неё. При этом должно получиться ровно два трёхклеточных уголка, а остальные — четырёхклеточные. Покажите, как это сделать.



Решение. Например, так:



Возможны и другие варианты.

Критерии.

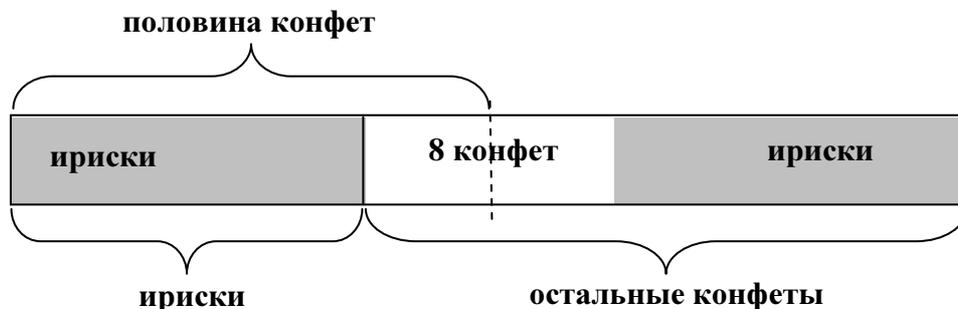
Верный пример разрезания на два трёхклеточных и четыре четырёхклеточных уголка — 7 баллов.

Разрезание, в котором неверное количество трёхклеточных и четырёхклеточных уголков или другие ошибки, — 0 баллов.

3. На столе лежат конфеты трёх видов: ириски, карамельки и леденцы. Известно, что ирисок на 8 меньше, чем всех остальных конфет, а карамелек — на 14 меньше, чем всех остальных конфет. Сколько леденцов лежит на столе? Обязательно объясните свой ответ.

Решение.

Способ 1. Так как ирисок на 8 меньше, чем остальных конфет, их на 4 меньше, чем половина конфет. Так как карамелек на 14 меньше, чем всех остальных конфет, их на 7 меньше, чем половина конфет. Таким образом, если выкинуть все ириски и карамельки, то останется $4 + 7 = 11$ конфет. А так как оставшиеся конфеты — это как раз леденцы, их 11.



Способ 2.

Пусть l , k , u — количество леденцов, ирисок и карамелек.

По условию

$$l + k = 8 + u,$$

$$l + u = 14 + k.$$

Складывая эти равенства, получем: $2l + k + u = 22 + k + u$

Поэтому $2l = 22$, откуда $l = 11$.

Критерии проверки.

Полное верное решение — 7 баллов.

Одна арифметическая ошибка при решении системы, ход решения верный — 4-5 баллов.

Верный ответ и проверка, что он подходит, — 3 балла.

Задача решена на конкретном примере («пусть всего конфет 30, тогда...») — 2 балла.

Верный ответ без обоснования — 2 балла.

Остальные случаи — 0 баллов.

4. а) Разбейте натуральные числа от 1 до 10 на пары так, чтобы разность чисел в каждой паре была равна 2 или 3.

б) Можно ли натуральные числа от 1 до 2014 разбить на пары так, чтобы разность чисел в каждой паре была 2 или 3?

Решение.

а) (4;1), (5;2), (6;3), (9;7), (10;8) или (3;1), (4;2), (8;5), (9;6), (10;7).

б) Числа от 1 до 2014 также можно разбить на пары, обладающие заданным свойством. Покажем два наиболее естественных способа такого разбиения.

Способ 1. Числа от 1 до 2010 разобьём на 201 группу по 10 последовательных натуральных чисел. Затем в каждой группе разобьём числа на пары аналогично тому, как это сделано в пункте а). Оставшиеся четыре числа разобьём на пары следующим образом: (2013; 2011), (2014; 2012).

Способ 2. Любые четыре последовательных числа можно разбить на пары так, чтобы разность чисел в каждой паре была равна 2: $(n + 2; n)$ и $(n + 3; n + 1)$. Так как число 2008 делится на 4, числа от 1 до 2008 можно разбить на группы по четыре последовательных числа, которые разбиваются на нужные пары. Оставшиеся шесть чисел разобьём на пары следующим образом: $(2012; 2009)$, $(2013; 2010)$, $(2014; 2011)$.

Возможны и другие разбиения чисел на группы по 4 и по 6 последовательных чисел, которые в свою очередь разбиваются на пары, обладающие заданным свойством.

Критерии проверки.

Приведён верный ответ в пункте а) (обоснование не требуется) — 2 балла.

Приведено верное полное решение пункта б) — 5 баллов.

Решение пункта б) в целом верное, но содержит некоторые пропуски — 3–4 балла.

В пункте б) есть идея разбиения на группы по 4 и по 6 чисел, но других продвижений нет — 2 балла.

Ответ «можно» в пункте б) – 0 баллов.

5. В волшебной кофейне встретились 55 существ: эльфов и гномов. Каждый заказал себе либо чашку чая, либо чашку кофе. Все эльфы говорят правду, когда пьют чай, и обманывают, когда пьют кофе, а все гномы — наоборот. На вопрос «Вы пьёте чай?» ответили «да» 44 присутствующих, на вопрос «Вы гном?» — 33. А на самом деле — сколько из собравшихся пили чай и сколько среди собравшихся было гномов? Обязательно объясните свой ответ.

Решение.

Посмотрим, как на какой вопрос ответят гномы и эльфы, составим соответствующую таблицу.

	«Вы пьёте чай?»	«Вы гном?»
Эльф, пьющий чай	да	нет
Эльф, пьющий кофе	да	да
Гном, пьющий чай	нет	нет
Гном, пьющий кофе	нет	да

Из таблицы видно, что на первый вопрос все эльфы ответят «Да», а все гномы ответят «нет», поэтому всего 44 эльфа и, значит, $55 - 44 = 11$ гномов. На второй вопрос «да» ответят пьющие кофе, а «нет» – пьющие чай. Поэтому всего 33 существа пьют кофе, а значит $55 - 33 = 22$ существа пьют чай.

Ответ. На самом деле 22 существа пьют чай и 11 из собравшихся — гномы.

Критерии проверки.

Полное решение — 7 баллов.

Дан ответ только на один вопрос (т. е. найдено только количество гномов или только количество пьющих чай) с полным обоснованием — 3 балла.

Найдено (с обоснованием) количество пьющих кофе и количество эльфов, а дальше продвижений нет (т. е. не догадались вычесть найденные числа из 55) — 3 балла.

Только верный ответ без обоснования (возможно, с проверкой на конкретном примере, что всё сходится) — 2 балла.