ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 2016–2017уч. г.

ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

10 класс

Решения и критерии оценивания

**1.** В таблице 3х3 записаны числа, как показано на рисунке. За ход разрешается выбрать три клетки в форме трёхклеточного уголка и уменьшить число в каждой из них на 1. Покажите, как такими операциями сделать таблицу, в которой во всех клетках стоят нули.

Решение**.** Один из способов таков.

Сначала обнуляем угловые ячейки с числами «3» вместе с их соседями. Затем уменьшаем ячейки с числами 4, 11и5. Потом уменьшаем ячейки с числами 6, 7,7. Из результата легко получается таблица с нулями.

Примечание*.* Заметим, что сумма чисел на большой диагонали равна 17, а сумма остальных чисел равна 34. Поэтому если выбирать только уголки, в которых одна клетка лежит на диагонали, а две другие нет, то при каждом шаге сумма чисел на диагонали будет уменьшаться на 1, а сумма остальных чисел на 2. Остаётся показать правильную последовательность выбора таких уголков.

Критерии проверки**.**

* Указана цепочка промежуточных состояний таблицы и понятно, как они получаются друг из друга,—7 баллов.
* Если цепочка промежуточных состояний указана с небольшими пробе-лами, но в целом верна—5–6 баллов.
* Если есть рассуждение о суммах чисел на большой диагонали и всех остальных чисел, но конкретный пример не приведён—3балла.

**2.** Делится ли 132013 + 132014 + 132015 на 61?

Ответ**.** Да, делится.

Решение**.** Преобразуем данную сумму:

132013 + 132014 + 132015 = 132013  (1 + 13 + 132) = 183  132013 = 61  3  132013.

Значит, данная сумма делится на 61.

Критерии проверки

* Верное решение— 7 баллов.
* Вынесено за скобки число 132013, но число в скобках посчитано с ошибкой и поэтому утверждается, что выражение не делится на 61,—2 балла.
* Приведён только ответ «да» — 0 баллов.
1. Даны два уравнения *ax*2+*bx*+*c*=0 и *cx*2+*bx*+*a*=0, в которых все коэффициенты ненулевые. Оказалось, что они имеют общий корень. Верно ли, что *a*=*c*?

Ответ**.** Нет, не верно.

Решение**.** Достаточно привести пример двух таких уравнений. Например, уравнения *x*2 – 3*x*+ 2 = 0 и 2*x*2 – 3*x*+ 1 = 0 имеют общий корень *x*= 1.

Комментарий*.* Можно указать общие свойства таких уравнений. Пусть *x*=*t*—

общий корень, то есть выполнены *at*2 + *bt*+ *c*= 0 и *ct*2 + *bt*+ *a*= 0. Тогда

–*bt*= *at*2 + *c* = *ct*2 + *a* ⇒ *at*2 – *ct*2 = *a* – *c* ⇒ (*a* – *c*)(*t*2 – 1) = 0.

Если *a**c*, то *t*=1. Вывод: если дана пара таких уравнений, для которых *a**c,*

то общий корень равен 1 или –1. Тогда коэффициенты удовлетворяют соотношению *a**b*+*c*=0. Нетрудно подобрать такую тройку, в которой *a**c*.

Критерии проверки**.**

* Для полного решения задачи достаточно привести подходящую пару уравнений и показать, что они имеют общий корень —7баллов.
* Приведена подходящая пара уравнений и более ничего не обосновано,— 5баллов.
1. В некоторой школе каждый десятиклассник либо всегд а говори тправду, либо всегда лжёт. Директор вызвал к себе нескольких десятиклассников и спросил каждого из них про каждого из остальных, правдивец тот или лжец. Всего было получено 44 ответа «правдивец» и 28 ответов «лжец». Сколько правдивых ответов мог получить директор?

Ответ**.** 16 или 56.

Решение**.** Если вызвано *n* десятиклассников, то дано *n*(*n*– 1) = 44 + 28 = 72 ответа, откуда *n*=9. Пусть из этих 9 школьников *t* правдивцев и (9–*t*) лжецов. Ответ «лжец» может дать только лжец про правдивца и правдивец про лжеца, таких фраз было 2*t*(9–*t*)=28, откуда *t* =2 или *t* =7. Если правдивцев двое, то они дали 28=16 правдивых ответов. Если правдивцев семеро, то они дали 78=56 правдивых ответов.

Комментарий*.* Обратите внимание на то, что из условия следует, что правди-выми являются половина из ответов «лжец». Но сразу неясно, какова доля правдивых ответов «правдивец».

Критерии проверки.

* Полное решение — 7 баллов.
* Правильно найдены оба случая (сколько правдивцев и лжецов), но неверно подсчитано число правдивых ответов — 4 балла.
* Возможны 2 ситуации, описанные в задаче. Если верно разобрана только одна, то – 3 балла.
* Приведены оба ответа без объяснения —1 балл.
* Приведён только один из ответов—0 баллов.
1. Могут ли две биссектрисы треугольника разбивать его на четыре части равной площади?

Ответ**.** Нет, не могут.

Способ **1.** Пусть такое возможно, т.е. биссектрисы *AD* и *BE* треугольника *ABC* разбивают его на четыре части равной площади. Пусть *I* точка пересечения указанных биссектрис. Равновеликие треугольники *AIB* и *AIE* имеют общую высоту, проведённую из вершины *A*, поэтому *BI* = *IE*. Аналогично, из равенства площадей треугольников *AIB* и *DIB* следует равенство *AI* = *ID*. Значит, диагонали четырёхугольника *AEDB* точкой пересечения делятся пополам, т.е. *AEDB*—параллелограмм. Это невозможно, так как прямые *AE* и *BD* не параллельны, они пересекаются в точке *C*.

Способ **2.** Пусть такое возможно, т.е. биссектрисы *AD* и *BE* треугольника *ABC* разбивают его на четыре части равной площади. Треугольники *ACD* и *ABD* равновелики, поэтому биссектриса *AD* — медиана. Аналогично *BE*—медиана. Три медианы делят треугольник на шесть равновеликих частей, значит, площадь треугольника *AIE* составляет шестую часть площади треугольника *ABC*, а не четверть (как в условии). Противоречие.

Примечание. Заметим, что из решения первым способом следует, что условие задачи избыточно, достаточно равенства площадей трёх получившихся треугольников.

Критерии проверки**.**

* Любое полное верное решение—7 баллов.
* В целом верное решение, содержащее пробелы в обосновании,—5−6баллов.
* Некоторые разумные идеи, не приведшие к верному решению,—1−2балла.
* Верный ответ—0 баллов.
1. Существует ли натуральное число, кратное 2015, сумма цифр которого равна 2015?

Ответ**.** Существует.

Решение**.** Достаточно привести один пример такого числа. Покажем пару способов, как можно получать такие примеры.

Пример **1.** Заметим, что 10075=2015$∙$5, сумма цифр числа 10075 равна 13.

Тогда число 1007510075...10075

,\_ \_,

155 раз

кратно 2015, а сумма его цифр равна

13  155 = 2015.

Пример **2.** Сумма цифр числа 2015 равна 8, сумма цифр числа 4030=20152 равна 7. Представим число 2015 в виде суммы двух слагаемых, одно из которых кратно семи, а другое — восьми. Например,

 2015 = 7 + 8  251. Тогда число

403020152015...2015 кратно 2015, и сумма его цифр равна 2015.

, \_\_,

251 раз

Критерии проверки**.**

* Для полного решения задачи достаточно привести пример числа и показать, что оно удовлетворяет данным требованиям, — 7баллов.
* Приведено число без объяснений—5баллов.
* Если в решении есть идея «составлять» нужное число из чисел, кратных 2015, например 403040302015…2015, но количество чисел посчитано неверно, —3балла.
* Только верный ответ—0 баллов.